

## 5. Hulkade kahendpuu (puu)

1 sekund

50 punkti

Hulkade kahendpuu erineb tavalisest kahendotsingu puust selle poolest, et puu igas tipus võib olla mitu elementi. Samas kehtib kahendotsingu puu põhitingimuse üldistus: mistahes tipu vasaku alampuu kõik elemendid peavad olema väiksemad ja parema alampuu kõik elemendid suuremad kõigist tipu enda elementidest.

Seega saab hulkade kahendpuus elementi otsida samamoodi kui tavalises kahendotsingu puus. Muuhulgas saab igas tipus otsustada, kas otsitav element peab olema selles tipus või kas tuleks otsingut jätkata vasakus või paremas alampuus. Kui loeme selle otsustamise üheks operatsiooniks, on mistahes elementi sisaldava tipu leidmiseks vaja täpselt nii palju operatsioone, kui palju on tasemeid puu juurest selle elemendi asukohani.

Tippude mäluhalduse iseärasuste tõttu on puu ühes tipus olla võivate elementide maksimaalne arv erinevatel tasemetel erinev. Täpsemalt, kui juurtipu taseme number on 1, siis on tasemel number  $i$  ühes tipus olevate elementide maksimaalne arv  $m_i$  määratud seostega

$$m_i = \begin{cases} M & \text{kui } i = 1, \\ \max(1, m_{i-1} - D_{((i-2) \bmod K)+1}) & \text{kui } i > 1, \end{cases}$$

kus  $M$ ,  $K$  ja  $D_j$  on antud täisarvud ning  $(i-1) \bmod K$  on arvu  $i-1$  arvuga  $K$  jagamisel tekkiv jääk. Näiteks kui  $M = 4$ ,  $K = 2$  ja  $D_1 = 1$ ,  $D_2 = 2$ , siis võib puu juurtipus olla maksimaalselt  $m_1 = M = 4$ , tema vahetutes alluvates kummaski maksimaalselt  $m_2 = m_1 - D_1 = 4 - 1 = 3$ , nende vahetutes alluvates igaühes  $m_3 = m_2 - D_2 = 3 - 2 = 1$  ja kõigis järgmistes kihtides igas tipus maksimaalselt  $m_i = \max(1, \dots) = 1$  element.

Lisaks on teada, et puu kasutamisel otsitakse erinevaid elemente sellest erinevate tõenäosustega ja seega ei tarvitse balansseeritud puu anda parimat keskmist päringule vastamise aega. Näiteks kui ülekaalukalt kõige sagedamini otsitakse minimaalset elementi, on kasulik panna see puu juurtipu ja siis peab kogu vasak alampuu jääma tühjaks.

Ülesanne on leida keskmine ühe elemendi otsimiseks vajalik operatsioonide arv antud elementide hulga ja päringute tõenäosuste jaoks optimaalse kujuga hulkade kahendpuus.

**Sisend.** Tekstifaili `puusis.txt` esimesel real on kolm täisarvu: hulga elementide arv  $N$  ( $1 \leq N \leq 100$ ) ning  $M$  ( $1 \leq M \leq N$ ) ja  $K$  ( $1 \leq K \leq N$ ). Järgmisel  $K$  real on igaühel üks täisarv: real  $j+1$  on  $D_j$  väärtus ( $0 \leq D_j \leq M$ ). Faili viimasel real on  $N$  reaalarvu  $P_i$  ( $0 \leq P_i \leq 1$ ;  $\sum_{i=1}^N P_i = 1$ ): elementide otsimise tõenäosused. Tõenäosused on järjestatud elementide väärtuste järgi (esimene tõenäosus vastab vähimale elemendile). Pange tähele, et elementide väärtused ei ole lahenduse jaoks olulised; võib eeldada, et nad on kõik erinevad.

**Väljund.** Tekstifaili `puuval.txt` ainsale reale väljasta üks reaalarv, ühele otsingule kuluv keskmine operatsioonide arv optimaalse kujuga puus. Väljastatud vastus võib täpsest erineda ülimalt  $10^{-6}$  võrra.

Näide.	puusis.txt	puuval.txt
	4 2 1	1.5000000
	2	
	0.2 0.2 0.3 0.3	

**Näide.**

puusis.txt	puuval.txt
13 4 2	1.7200000
1	
0	
0.06 0.06 0.06 0.06 0.06 0.06 0.115 0.115 0.115 0.115 0.06 0.06 0.06	

Teises näites on optimaalne puu kuju järgmine:

