min (hind)

nii, et ⩾ 50 (valk)

⩾ 275 (süsiv.)

⩾ 78 (rasv)

min	$0{,}74\,x_1$		(hind)
nii, et	$3{,}78\,x_1$	$\geqslant 50$	(valk)
	$10{,}7\,x_1$	$\geqslant 275$	(süsiv.)
	$9{,}94\,x_1$	$\geqslant 78$	(rasv)

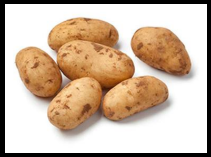


X_1 - rosolje

min	$0{,}74\,x_1 + 0{,}09\,x_2$		(hind)
nii, et	$3{,}78\,x_1 + 2{,}5\,x_2$	$\geqslant 50$	(valk)
	$10{,}7\,x_1 + 21{,}0\,x_2$	$\geqslant 275$	(süsiv.)
	$9{,}94\,x_1 + 0{,}1\,x_2$	$\geqslant 78$	(rasv)



X_1 - rosolje



X_2 - kartul

$$\min \quad 0{,}74x_1 + 0{,}09x_2 + 0{,}17x_3 \quad \text{(hind)}$$

nii, et

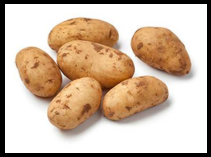
$$3{,}78x_1 + 2{,}5x_2 + 6{,}5x_3 \geqslant 50 \quad \text{(valk)}$$

$$10{,}7x_1 + 21{,}0x_2 + 48{,}6x_3 \geqslant 275 \quad \text{(süsiv.)}$$

$$9{,}94x_1 + 0{,}1x_2 + 1{,}3x_3 \geqslant 78 \quad \text{(rasv)}$$



X_1 - rosolje



X_2 - kartul



X_3 - leib

$$\min \quad 0{,}74x_1 + 0{,}09x_2 + 0{,}17x_3 + 1{,}72x_4 \qquad \text{(hind)}$$

nii, et

$$3{,}78x_1 + 2{,}5x_2 + 6{,}5x_3 + 12{,}4x_4 \geqslant 50 \qquad \text{(valk)}$$

$$10{,}7x_1 + 21{,}0x_2 + 48{,}6x_3 + 27{,}9x_4 \geqslant 275 \qquad \text{(süsiv.)}$$

$$9{,}94x_1 + 0{,}1x_2 + 1{,}3x_3 + 23x_4 \geqslant 78 \qquad \text{(rasv)}$$



X_1 - rosolje



X_2 - kartul



X_3 - leib



X_4 - kohuke

$$\min \quad 0{,}74x_1 + 0{,}09x_2 + 0{,}17x_3 + 1{,}72x_4 \qquad \text{(hind)}$$

nii, et

$$3{,}78x_1 + 2{,}5x_2 + 6{,}5x_3 + 12{,}4x_4 \geq 50 \qquad \text{(valk)}$$

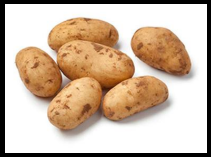
$$10{,}7x_1 + 21{,}0x_2 + 48{,}6x_3 + 27{,}9x_4 \geq 275 \qquad \text{(süsiv.)}$$

$$9{,}94x_1 + 0{,}1x_2 + 1{,}3x_3 + 23x_4 \geq 78 \qquad \text{(rasv)}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$



x_1 – rosolje



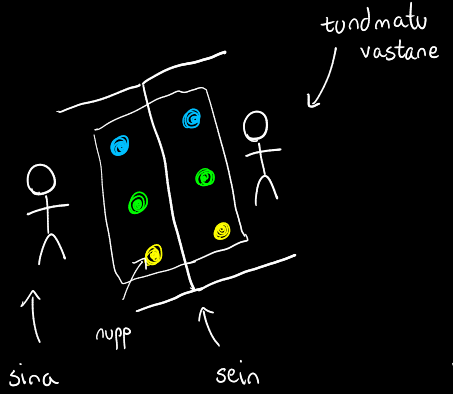
x_2 – kartul



x_3 – leib



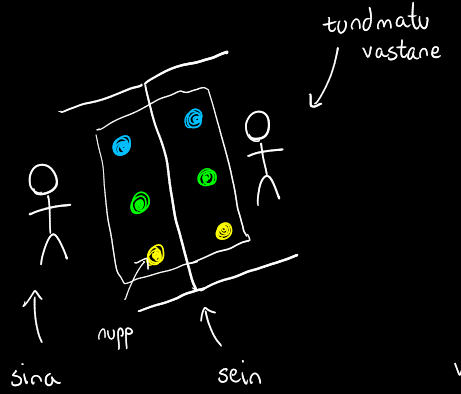
x_4 – kohuke



Sina ja vastane vajutate kumbki nupule. Avanenuks:

	sina	sina	sina
	6	1	3
vastane	1	5	7
	3	7	0

Vastase kohta ei eelda mitte midagi.



Sina ja vastane vajutate kumbki nupule. Auhinnaks:

vastane \ sina			
	6	1	3
	1	5	7
	3	7	0

Vastase kohta ei eelda mitte midagi.

$P_{\blacksquare}$ – valid

$P_{\blacksquare}$ – valid

$P_{\blacksquare}$ – valid

Eesmärk: keskväärtus $\geq L$

võimalikult suure L jaoks sõltumata vastasest.

max L

nii, et $p_{\text{🔵}} + p_{\text{🟢}} + p_{\text{🟡}} = 1$

	Sina 🔵	Sina 🟢	Sina 🟡
🔵	6	1	3
vastane 🟢	1	5	7
🟡	3	7	0

max L

nii, et $p_1 + p_2 + p_3 = 1$

$6p_1 + p_2 + 3p_3 \geq L$ (vastane valis 1)

	Sina 1	Sina 2	Sina 3
1	6	1	3
vastane 2	1	5	7
3	3	7	0

$\max \quad L$

nii, et $\quad p_1 + p_2 + p_3 = 1$

$6p_1 + p_2 + 3p_3 \geq L$ (vastane valis 🟦)

$p_1 + 5p_2 + 7p_3 \geq L$ (vastane valis 🟩)

	Sina 🟦	Sina 🟩	Sina 🟨
🟦	6	1	3
vastane 🟩	1	5	7
🟨	3	7	0

max L

nii, et $p_1 + p_2 + p_3 = 1$

$6p_1 + p_2 + 3p_3 \geq L$ (vastane valis 1)

$p_1 + 5p_2 + 7p_3 \geq L$ (vastane valis 2)

$3p_1 + 7p_2 + 0p_3 \geq L$ (vastane valis 3)

	Sina 1	Sina 2	Sina 3
1	6	1	3
vastane 2	1	5	7
3	3	7	0

max L

nii, et

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

$$6p_1 + p_2 + 3p_3 \geq L \quad \text{(vastane valis 1)}$$

$$p_1 + 5p_2 + 7p_3 \geq L \quad \text{(vastane valis 2)}$$

$$3p_1 + 7p_2 + 0p_3 \geq L \quad \text{(vastane valis 3)}$$

$$p_1, p_2, p_3 \geq 0$$

	Sina 1	Sina 2	Sina 3
1	6	1	3
vastane 2	1	5	7
3	3	7	0

$$\max \quad L$$

nii, et

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

$$6p_1 + p_2 + 3p_3 - L \geq 0$$

$$p_1 + 5p_2 + 7p_3 - L \geq 0$$

$$3p_1 + 7p_2 + 0p_3 - L \geq 0$$

$$p_1, p_2, p_3 \geq 0$$

	Sina		
	6	1	3
vastane	1	5	7
	3	7	0

$$\max \quad L$$

nii, et

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

$$6p_1 + p_2 + 3p_3 - L \geq 0$$

$$p_1 + 5p_2 + 7p_3 - L \geq 0$$

$$3p_1 + 7p_2 + 0p_3 - L \geq 0$$

$$p_1, p_2, p_3 \geq 0$$

Optimaalne:

$p_1 = 4/9 \quad L = 11/3$

$p_2 = 1/3$

$p_3 = 2/9$

	Sina		
	6	1	3
vastane	1	5	7
	3	7	0

Lineaarplaan (linear program): "lineaarvõrratuste süsteem"

$$\max \quad c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

nii, et

$$\begin{aligned}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n &\geqslant b_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n &\geqslant b_2 \\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \ddots \qquad\quad \vdots \qquad\quad &\vdots \\
a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n &\geqslant b_m
\end{aligned}$$

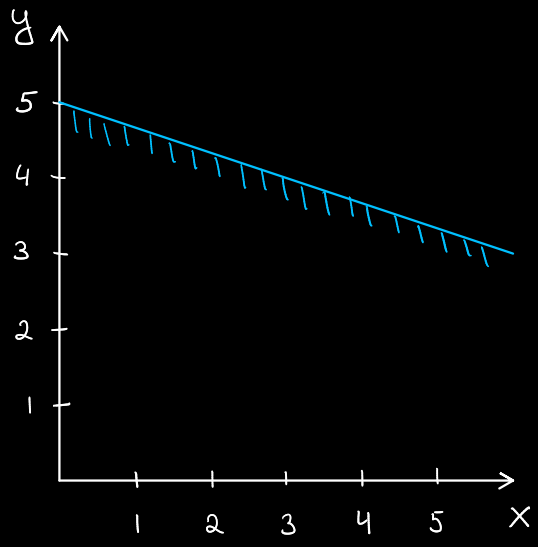
Lineaarplaan (linear program): "lineaarvõrratuste süsteem"

$$\max \quad c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

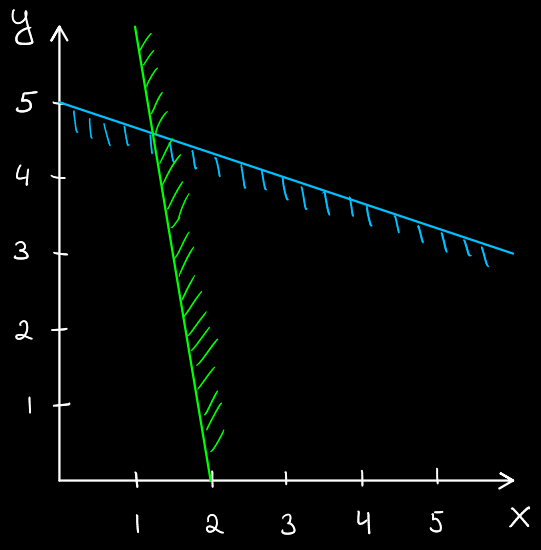
$$\text{nii, et} \quad \begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n &\geqslant b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n &\geqslant b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \ddots \qquad\quad \vdots \qquad\quad &\vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n &\geqslant b_m \end{aligned}$$

$$\max \quad \vec{c} \cdot \vec{x}$$

$$\text{nii, et} \quad A\vec{x} \geqslant \vec{b}$$

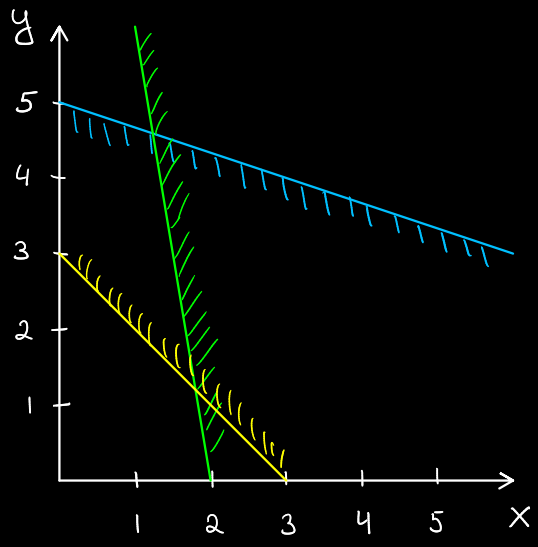


$x + 6y \leq 30$



$x + 6y \leq 30$

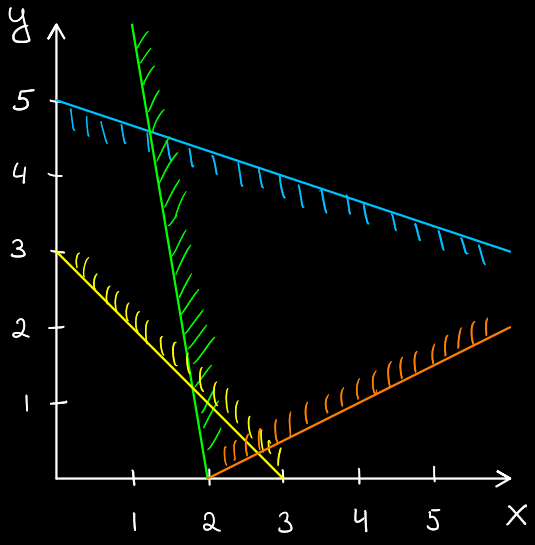
$6x + y \geq 12$



$x + 6y \leq 30$

$6x + y \geq 12$

$x + y \geq 3$

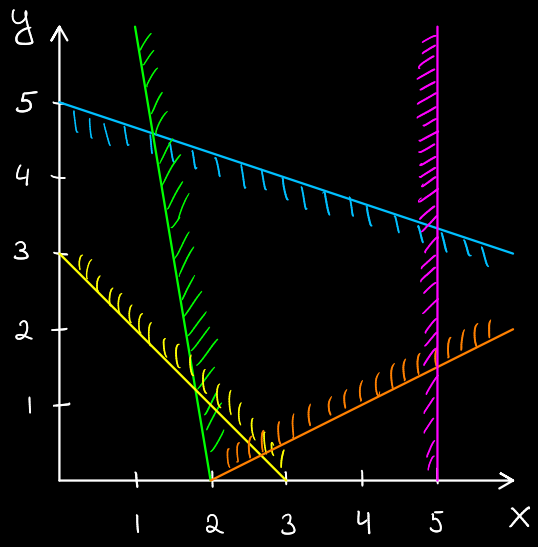


$x + 6y \leq 30$

$6x + y \geq 12$

$x + y \geq 3$

$-x + 2y \geq -2$



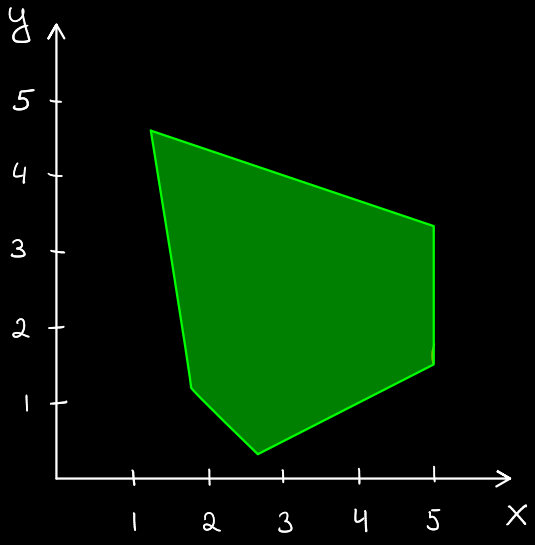
$x + 6y \leq 30$

$6x + y \geq 12$

$x + y \geq 3$

$-x + 2y \geq -2$

$x \leq 5$



$$x + 6y \leq 30$$

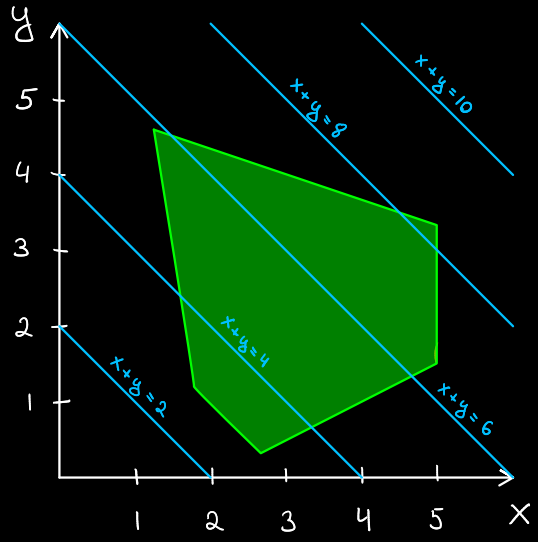
$$6x + y \geq 12$$

$$x + y \geq 3$$

$$-x + 2y \geq -2$$

$$x \leq 5$$

$$\max \quad x + y$$



$$x + 6y \leq 30$$

$$6x + y \geq 12$$

$$x + y \geq 3$$

$$-x + 2y \geq -2$$

$$x \leq 5$$

$$\max \; x + y$$

Nihuta sirget $x+y=?$ nii kaugele, kui võimalik nii, et see hulknurgaga lõikuks

Algoritme

- Simplex

  (ei ole polünomiaalne, aga praktikas kiire)

- Ellipsoid

  (polünomiaalne, aga ebapraktiline)

- Sisepunktimeetodid

$$\max \quad c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

$$\text{nii, et} \quad \begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n &\geqslant b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n &\geqslant b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \ddots \qquad\quad \vdots \qquad\quad &\vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n &\geqslant b_m \end{aligned}$$

$$\max \quad \vec{c} \cdot \vec{x}$$

$$\text{nii, et} \quad A\vec{x} \geqslant \vec{b}$$

"Primaalne"

$$\min \quad \text{nii, et}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & c_1 & c_2 & \cdots & c_n & \leqslant & 0 \\ & = & = & & = & & \wedge \\ b_1 y_1 & a_{11} y_1 & a_{12} y_1 & \cdots & a_{1n} y_1 & & y_1 \\ + & + & + & & + & & \\ b_2 y_2 & a_{21} y_2 & a_{22} y_2 & \cdots & a_{2n} y_2 & & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ + & + & + & & + & & \\ b_m y_m & a_{m1} y_m & a_{m2} y_m & \cdots & a_{mn} y_m & & y_m \end{array}$$

$$\min \quad \vec{b} \cdot \vec{y}$$

$$\text{nii, et} \quad A^T \vec{y} = \vec{c}$$

"Duaalne"

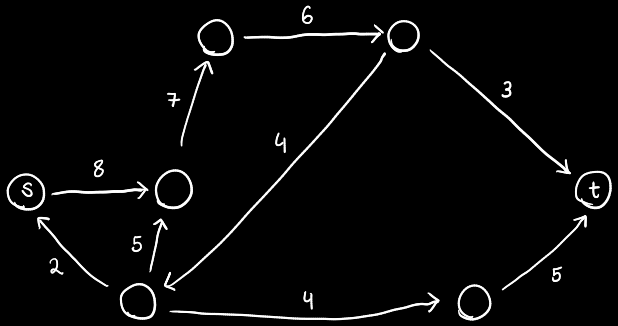
Primaalse ja duaalse ülesande optimumid on täpselt võrdsed!

("strong duality")

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 50\,y_v + 275\,y_s + 78\,y_r \\
\text{nii, et} \quad & 3{,}78\,y_v + 10{,}7\,y_s + 9{,}94\,y_r \leq 0{,}74 \qquad \text{(rosolje)} \\
& 2{,}5\,y_v + 21{,}0\,y_s + 0{,}1\,y_r \leq 0{,}09 \qquad \text{(kartul)} \\
& 6{,}5\,y_v + 48{,}6\,y_s + 1{,}3\,y_r \leq 0{,}17 \qquad \text{(leib)} \\
& 12{,}4\,y_v + 27{,}9\,y_s + 23\,y_r \leq 1{,}72 \qquad \text{(kohuke)} \\
& y_v,\ y_s,\ y_r \geqslant 0
\end{aligned}
$$

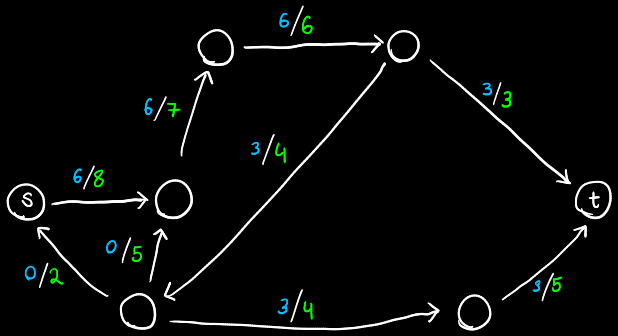
$$
\begin{aligned}
\min \quad & 0{,}74\,x_1 + 0{,}09\,x_2 + 0{,}17\,x_3 + 1{,}72\,x_4 && \text{(hind)} \\
\text{nii, et} \quad & 3{,}78\,x_1 + 2{,}5\,x_2 + 6{,}5\,x_3 + 12{,}4\,x_4 \geqslant 50 && \text{(valk)} \\
& 10{,}7\,x_1 + 21{,}0\,x_2 + 48{,}6\,x_3 + 27{,}9\,x_4 \geqslant 275 && \text{(süsiv.)} \\
& 9{,}94\,x_1 + 0{,}1\,x_2 + 1{,}3\,x_3 + 23\,x_4 \geqslant 78 && \text{(rasv)} \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

Maksimaalne voog!

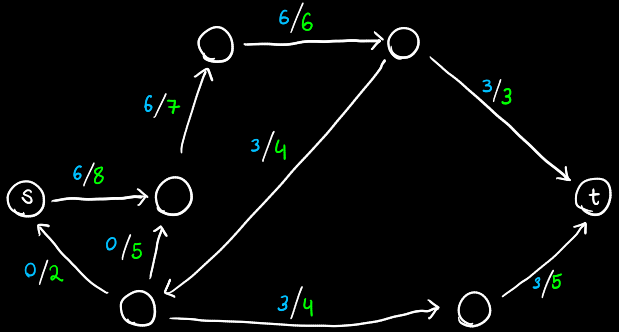


Suurna võimalikult palju "vett" $s \rightsquigarrow t$
nii, et ühegi serva mahtu ei ületa

Maksimaalne voog!

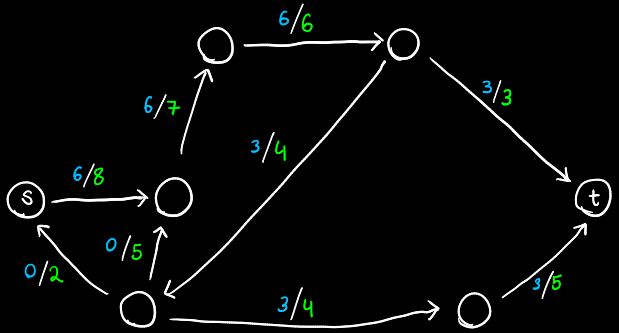


Suurna võimalikult palju "vett" $s \rightsquigarrow t$
nii, et ühegi serva mahtu ei ületa



Maht c_e, voog f_e

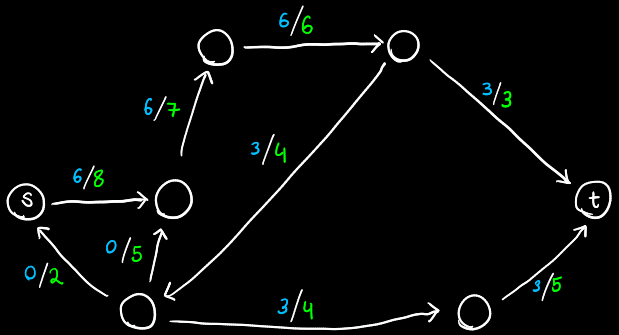
Iga serva e korral $f_e \leq c_e$, $f_e \geq 0$



Maht c_e, voog f_e

Iga serva e kohta $f_e \leq c_e$, $f_e \geq 0$

Iga tipu ($\neq s, t$) kohta $\sum_{e \text{ sisse}} f_e = \sum_{e \text{ välja}} f_e$

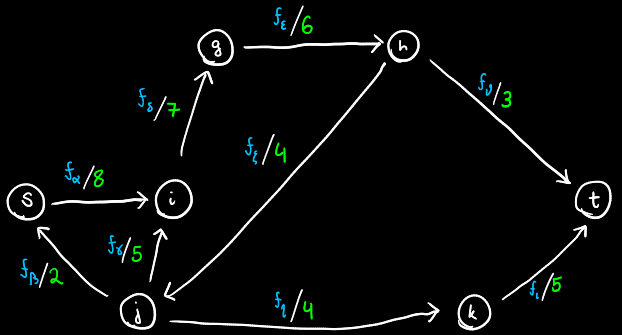


Maht c_e, voog f_e

Iga serva e kohta $f_e \leq c_e$, $f_e \geq 0$

Iga tipu ($\neq s, t$) kohta $\sum_{e \text{ sisse}} f_e = \sum_{e \text{ välja}} f_e$

Maksimeerida s jaoks $\sum_{e \text{ välja}} f_e$



Maht c_e, voog f_e

Iga serva e korral $f_e \leq c_e$, $f_e \geq 0$

Iga tipu ($\neq s, t$) korral $\sum_{e \text{ sisse}} f_e = \sum_{e \text{ välja}} f_e$

Maksimeerida s jaoks $\sum_{e \text{ välja}} f_e$

$$\max \quad f_\alpha$$

nii, et

$$f_\alpha \leq 8 \qquad f_\varepsilon \leq 6 \qquad f_\alpha + f_\gamma - f_\delta = 0$$

$$f_\beta \leq 2 \qquad f_\zeta \leq 4 \qquad f_\delta - f_\varepsilon = 0$$

$$f_\gamma \leq 5 \qquad f_\eta \leq 4 \qquad f_\varepsilon - f_\gamma - f_\beta = 0$$

$$f_\delta \leq 7 \qquad f_\vartheta \leq 3 \qquad f_\zeta - f_\vartheta - f_\zeta = 0$$

$$f_* \geq 0 \qquad f_\iota \leq 5 \qquad f_\eta - f_\iota = 0$$

Maht c_e, voog f_e

Iga serva e kohta $f_e \leq c_e$, $f_e \geq 0$

Iga tipu ($\neq s, t$) kohta $\sum_{e \text{ sisse}} f_e - \sum_{e \text{ välja}} f_e = 0$

Maksimeerida s jaoks $\sum \cdot f_e$

Iga serva e kohta muutuja $y_e \geq 0$

Iga tipu v kohta muutuja x_v

Serva $e = u \xrightarrow{c_e} v$ kohta võratus $-x_u + x_v + y_e \geq 0$

(kui $u = s$, siis $x_v + y_e \geq 1$, tinglikult $x_s = 1$, $x_t = 0$)

Minimeerida $\sum_{e \text{ serv}} c_e y_e$

Iga serva e kohta muutuja $y_e \geq 0$

Iga tipu v kohta muutuja x_v

Serva $e = u \xrightarrow{c_e} v$ kohta võrratus $x_u - x_v \leq y_e$

(kui $u = s$, siis $x_v + y_e \geq 1$, tinglikult $x_s = 1$, $x_t = 0$)

Minimeerida $\sum_{e \text{ serv}} c_e y_e$

Iga serva e kohta muutuja $y_e \geq 0$

Iga tipu v kohta muutuja x_v

Serva $e = u \xrightarrow{c_e} v$ kohta võrratus $x_u - x_v \leq y_e$

(kui $u = s$, siis $x_v + y_e \geq 1$, tinglikult $x_s = 1$, $x_t = 0$)

Minimeerida $\sum_{e \text{ serv}} c_e y_e$

Alati optimaalne võtta $y_e = \max(0, x_u - x_v)$

$$\min \sum_{e=uv} c_e \max(0, x_u - x_v)$$

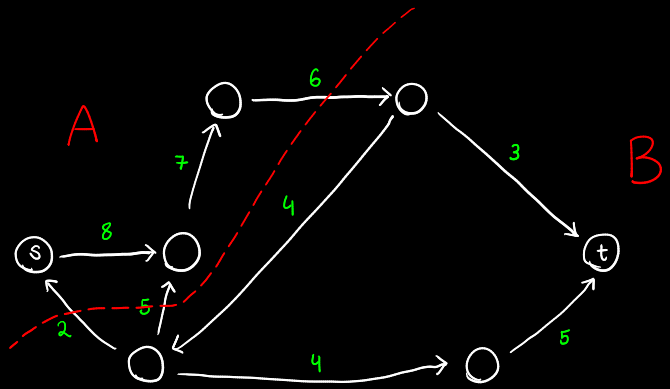
niii, et $x_s = 1, \quad x_t = 0$

Alati optimaalne valida $x_v \in \{0, 1\}$

$$\min \sum_{e=uv} c_e \max(0, x_u - x_v)$$

nii, et $x_s = 1$, $x_t = 0$

Alati optimaalne valida $x_v \in \{0, 1\}$



Jaga graaf kahelks nii, et $A \to B$ servade maht on minimaalne.

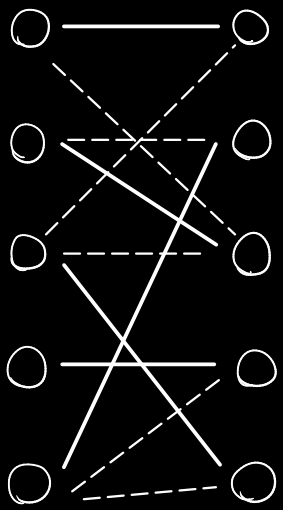
"Complementary slackness"

Primaalne lahend x^* ja duaalne lahend y^* on mõlemad optimaalsed

$\Updownarrow$

iga primaalse muutuja kohta: muutuja on 0 või vastav duaalne võrdus kehtib

iga duaalse muutuja kohta: muutuja on 0 või vastav primaalne võrdus kehtib



Kahealuseline graaf, igal servал kaal

Pane kõik tipud vastavusse nii, et kaalude summa on maksimaalne.

e kaal

kas võtta e?

$$\min \sum c_e x_e$$

nii, et $\sum_{\substack{v \text{ naaber-} \\ \text{servad } e}} x_e = 1$ iga tipu v kohta

$x_e \in \{0, 1\}$ iga serva e kohta

e kaal

kas võtta e?

$$\min \sum c_e x_e$$

nii, et $\sum_{\substack{v \text{ naaber-} \\ \text{servad } e}} x_e = 1$ iga tipu v kohta

$x_e \geq 0$ iga serva e kohta

e kaal

kas võtta e?

$$\min \sum_{e} c_e x_e$$

nii, et $\sum_{\substack{v \text{ naaber-} \\ \text{servad } e}} x_e = 1$ iga tipu v kohta

$x_e \geq 0$ iga serva e kohta

---

tipu v potentsiaal

$$\max \sum_{v} y_v$$

nii, et $y_u + y_v \leq c_e$ iga serva uv kohta

Täiendav mitterangus:

vastavus x^* ja potentsiaalid y^* on mõlemad optimaalsed

$\Updownarrow$

iga tipu u kohta $\sum_{\substack{e \text{ naaber-} \\ \text{serva } u}} x^*_e = 1$ (alati kehtib) või $y^*_u = 0$

iga serva $e = uv$ kohta $x^*_e = 0$ või $y^*_u + y^*_v = c_e$

Täiendav mitterangus:

vastavus x^* ja potentsiaalid y^* on mõlemad optimaalsed

$\Updownarrow$

iga tipu u kohta $\sum_{\substack{u \text{ naaber-} \\ \text{serval } e}} x_e^* = 1$ (alati kehtib) VÕI $y_u^* = 0$

iga serva $e = uv$ kohta $x_e^* = 0$ VÕI $y_u^* + y_v^* = c_e$

---

y^* optimaalne $\Leftrightarrow$ leidub vastavus, mis koosneb ainult servadest, kus $y_u^* + y_v^* = c_e$ JA kus kõik tipud on vastavusse pandud.

Algoritm:

1. Võtame $y = 0$
2. Arvutame max vastavuse servadega, kus $y_u + y_v = c_e$.
3. Kui vastavus on perfektne, on lahend leitud
4. "Teeme y paremaks"
5. Mine sammu 2.