Dünaamiline programmeerimine

Targo Tennisberg

Isehakanud guru

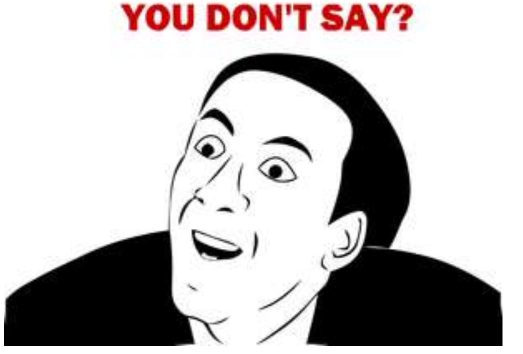
http://www.targotennisberg.com

Kava

- Mis on DP?
- Sissejuhatav ülesanne
  - Ja iseseisev töö!
- Ajalooliste võistluste näited
  - Ja iseseisev töö!
- Muud näited
  - Ja iseseisev töö!

Näide 1. Fibonacci jada

$$F_n = \begin{cases} 0, & \text{kui } n = 0 \\ 1, & \text{kui } n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2}, & \text{kui } n > 1 \end{cases}$$



Naiivne lahendus

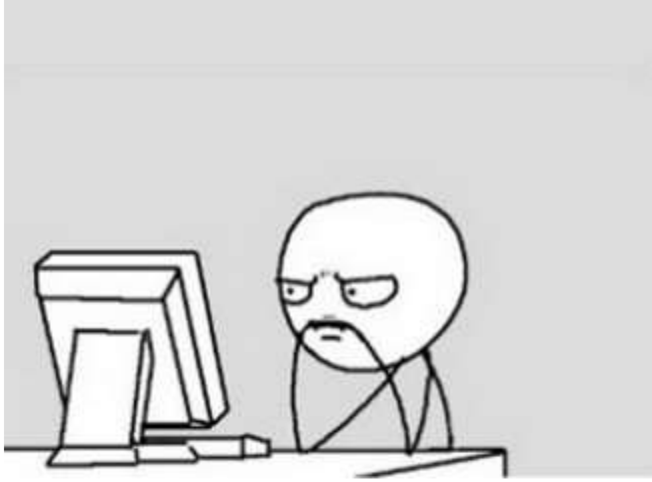
```
long Fib1(int n)
{
    if (n == 0) return 0;
    if (n == 1) return 1;
    return Fib1(n - 1) + Fib1(n - 2);
}
```

Mäluga rekursioon

```
const int max = 100000;
long[] a = new long[max];

long Fib2(int n)
{
    if (n == 0) return 0;
    if (n == 1) return 1;
    if (a[n] == 0)
        a[n] = Fib2(n - 1) + Fib2(n - 2);

    return a[n];
}
```

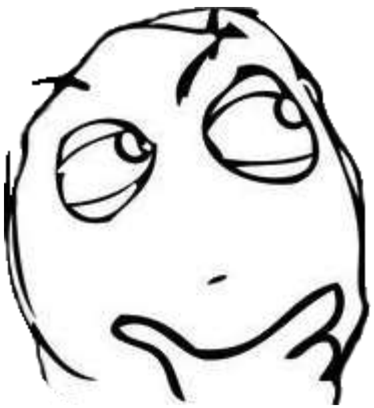


Lihtne DP

```
long Fib3(int n)
{
    const int max = 100000;
    long[] a = new long[max];
    a[0] = 0;
    a[1] = 1;

    for (int i = 2; i <= n; i++)
    {
        a[i] = a[i - 1] + a[i - 2];
    }

    return a[n];
}
```



Kokkuhoidlik DP

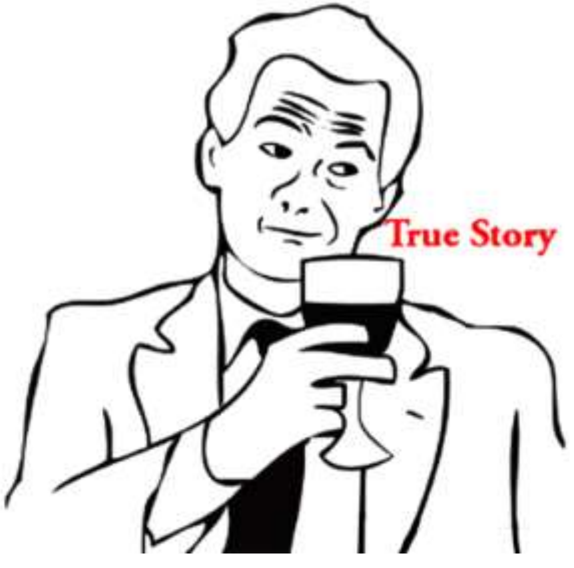
```
long Fib4(int n)
{
    long[] a = new long[3];
    a[0] = 0;
    a[1] = 1;

    for (int i = 2; i <= n; i++)
    {
        a[i % 3] =
          a[(i - 1) % 3] +
          a[(i - 2) % 3];
    }

    return a[n % 3];
}
```

Lahendamise suund

- “Ülalt alla” → tükeldamine
  - mäluga rekursioon
  - sageli lihtsam taibata
- “Alt üles” → kokkukleepimine
  - “stiilipuhas” DP
  - võib olla efektiivsem



Natuke tõsisem ülesanne - mündid

- Antud N münti väärtustega $V_1, V_2, \ldots, V_N$
- Leida minimaalne müntide arv, millega saab tasuda summa S
- Idee: Leiame vastuse iga arvu $0<i<=S$ jaoks
- Realiseerige ja käige debugeris läbi järgmine lahendus

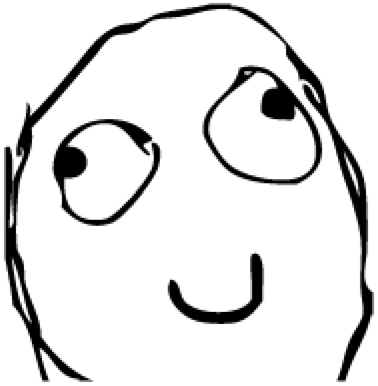
```
Set Min[i] equal to Infinity for all of i
Min[0]=0
For i = 1 to S
  For j = 0 to N - 1
    If (Vj<=i AND Min[i-Vj]+1<Min[i])
      Then Min[i]=Min[i-Vj]+1
Output Min[S]
```

Pikim kasvav osajada

- On antud N arvust koosnev jada. Leida selles jadas pikima kasvava osajada pikkus.
  - Jada on kasvav siis, kui iga i korral Ji < Ji+1.
  - Osajada elemendid ei pea olema omavahel järjest, s.t seal võib olla ka auke.
- NÄIDE:
  - N = 6
  - Jada = [1, 3, 2, 4, 3, 7]
  - Vastus: 4 (näiteks [1, 3, 4, 7])

Ristsumma

- Kirjutada programm, mis leiab, kui palju on selliseid antud arvust väiksemaid naturaalarve, mille ristsumma on võrdne antud arvu ristsummaga
- N <= 10^3
  - Triviaalne läbivaatus

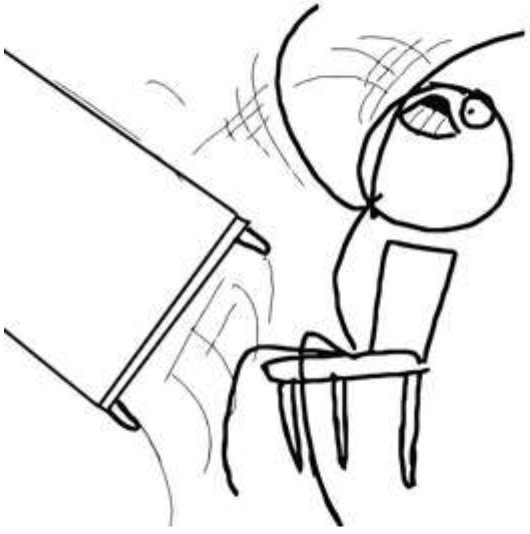


Ristsumma

- 10^9
  - Trikitamisega saavutatav

Ristsumma

- 10^18
  - ???
- Idee: vaatame arve järkude kaupa – kuidas saab 18 kohalise arvu vastuse tuletada nt 17-kohalise arvu vastusest?



Ristsumma Exceliga

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
2	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136	153	171
3	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364	455	560	680	816	969	1140
4	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001	1365	1820	2380	3060	3876	4845	5985
5	1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003	4368	6188	8568	11628	15504	20349	26334
6	1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008	12376	18564	27132	38760	54264	74613	100947
7	1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19448	31824	50388	77520	116280	170544	245157	346104
8	1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	43758	75582	125970	203490	319770	490314	735471	1081575
9	1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620	92378	167960	293930	497420	817190	1307504	2042975	3124550
10	0	9	63	282	996	2997	8001	19440	43749	92368	184745	352704	646633	1144052	1961241	3268744	5311718	8436267
11	0	8	69	348	1340	4332	12327	31760	75501	167860	352595	705288	1351909	2495948	4457175	7725904	13037606	21473856
12	0	7	73	415	1745	6062	18368	50100	125565	293380	645920	1351142	2702973	5198830	9655900	17381684	30419154	51892857
13	0	6	75	480	2205	8232	26544	76560	202005	495220	1140920	2491776	5194385	10392760	20048100	37429104	67847442	119739330
14	0	5	75	540	2710	10872	37290	113640	315315	810040	1950245	4441020	9634040	20024980	40070700	77496744	145340310	265074795
15	0	4	73	592	3246	13992	51030	164208	478731	1287484	3235727	7673744	17303416	37322208	77384340	154869456	300194262	565248708
16	0	3	69	633	3795	17577	68145	231429	708444	1992925	5223647	12889383	30180423	67484067	144841275	299671971	599811969	1164986064
17	0	2	63	660	4335	21582	88935	318648	1023660	3010150	8222357	21092292	51240891	118674570	263438325	562994016	1162635441	2327376348
18	0	1	55	670	4840	25927	113575	429220	1446445	4443725	12641772	33690306	84855615	203404215	466639050	1029313296	2191458423	4518099300
19	0	0	45	660	5280	30492	142065	566280	2001285	6420700	19013852	52611780	137299435	340409720	806551350	1835047456	4025198375	8541254700
20	0	0	36	633	5631	35127	174195	732474	2714319	9091270	28012754	80439789	217386520	557149607	1362556905	3195643120	7217572751	15753515733
21	0	0	28	592	5875	39662	209525	929672	3612231	12628000	40472894	120560088	337241320	893039018	2253099975	5444285920	12654132767	28394610894
22	0	0	21	540	6000	43917	247380	1158684	4720815	17223250	57402764	177316932	513207110	1403543155	3651444300	9086074320	21722825403	50087017143
23	0	0	15	480	6000	47712	286860	1419000	6063255	23084500	79992044	256168056	766883390	2165232160	5806283700	14872309920	36557706219	[illegible]
24	0	0	10	415	5875	50877	326865	1708575	7658190	30427375	109609379	363827190	1126269560	3281867680	9068126400	23900365620	60380575095	[illegible]
25	0	0	6	348	5631	53262	366135	2023680	9517662	39466306	147788201	508379664	1626975480	4891539744	13922343936	37745325216	97971030855	[illegible]
26	0	0	3	282	5280	54747	403305	2358840	11645073	50402935	196198211	699354228	2313440325	7174799646	21029659515	58630143456	1,56302E+11	[illegible]
27	0	0	1	220	4840	55252	436975	2706880	14033305	63412580	256600641	947732512	3240080545	10363639300	31274624245	89641329376	[illegible]	[illegible]
28	0	0	0	165	4335	54747	465795	3059100	16663185	78629320	330786236	1265876976	4472267215	14751050900	45822270930	1,34997E+11	[illegible]	[illegible]
29	0	0	0	120	3795	53262	488565	3405600	19502505	96130540	420496076	1667359200	6087014635	20700766100	66182627310	2,00373E+11	[illegible]	[illegible]
30	0	0	0	84	3246	50877	504315	3735720	22505751	115921972	527326778	2166673224	8173248070	28656627650	94282105353	2,93293E+11	8,67982E+11	[illegible]
31	0	0	0	56	2710	47712	512365	4038560	25614639	137924380	652623158	2778823488	10831511470	39150897800	1,3254E+11	4,23579E+11	1,28612E+12	3,72965E+12
32	0	0	0	35	2205	43917	512365	4303545	28759500	161963065	797362973	3518783697	14172978235	52810668925	1,83947E+11	6,03875E+11	1,88091E+12	5,58883E+12
33	0	0	0	20	1745	39662	504315	4521000	31861500	187761310	962039783	4400831436	18317641615	70361427150	2,52143E+11	8,50212E+11	2,71625E+12	8,26852E+12
34	0	0	0	10	1340	35127	488565	4682700	34835625	214938745	1146551153	5437773210	23391587635	92626745225	3,41488E+11	1,18263E+12	3,87498E+12	1,20831E+13
35	0	0	0	4	996	30492	465795	4782360	37594305	243015388	1350100235	6640085244	29523293215	1,20523E+11	4,5712E+11	1,62583E+12	5,46306E+12	1,74482E+13
36	0	0	0	1	715	25927	436975	4816030	40051495	271421810	1571119110	8015006143	36838945130	1,55049E+11	6,04993E+11	2,20979E+12	7,61423E+12	2,49061E+13
37	0	0	0	0	495	21582	403305	4782360	42126975	299515480	1807222010	9565627512	45456840130	1,97265E+11	7,91895E+11	2,97041E+12	1,0495E+13	3,51557E+13
38	0	0	0	0	330	17577	366135	4682700	43750575	326602870	2055195560	11290036836	55480999990	2,48274E+11	1,02542E+12	3,95001E+12	1,431E+13	4,90864E+13
39	0	0	0	0	210	13992	326865	4521000	44865975	351966340	2311031360	13180572120	66994212910	3,09181E+11	1,3139E+12	5,19773E+12	1,93074E+13	6,78159E+13

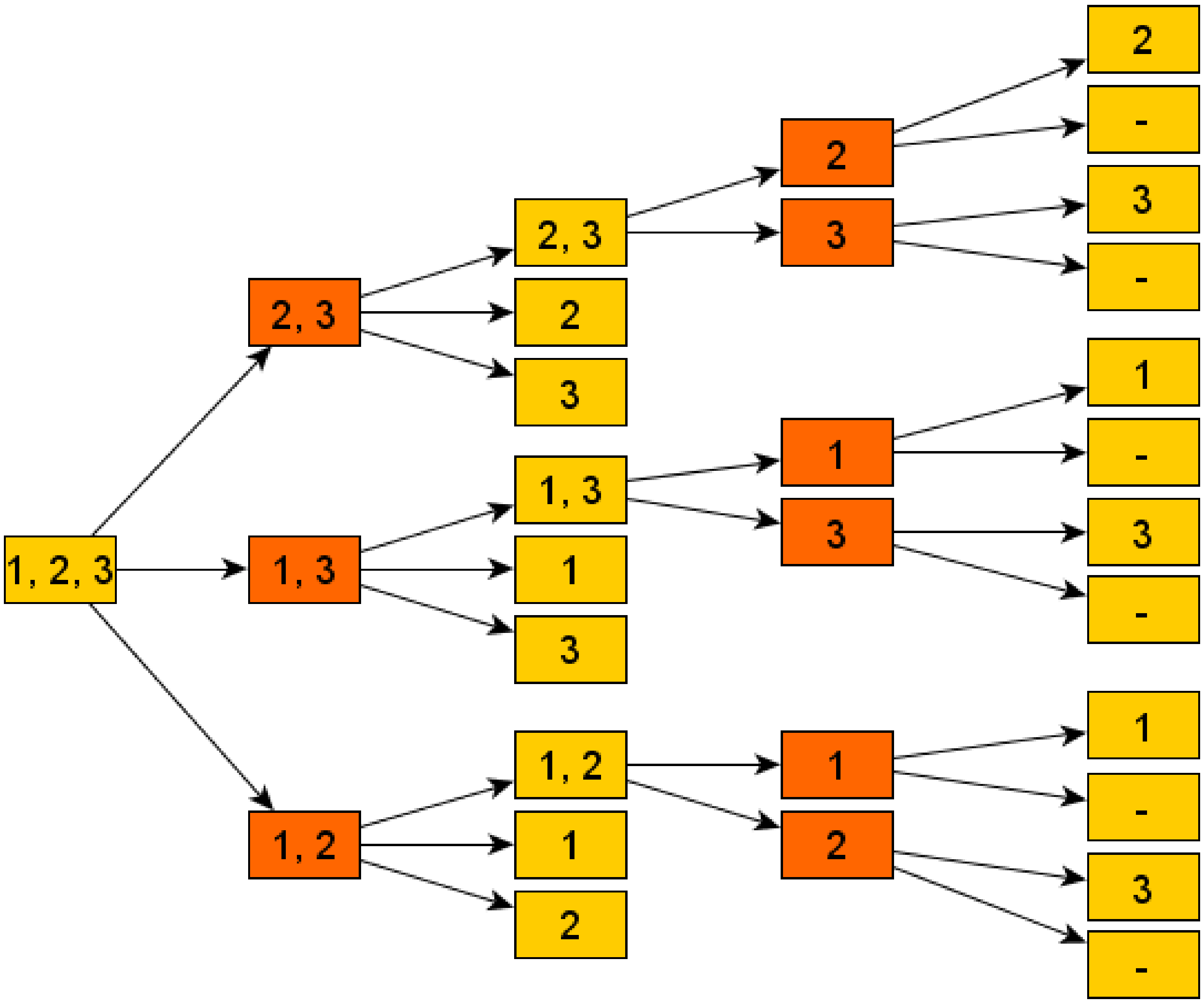
Iseseisev töö

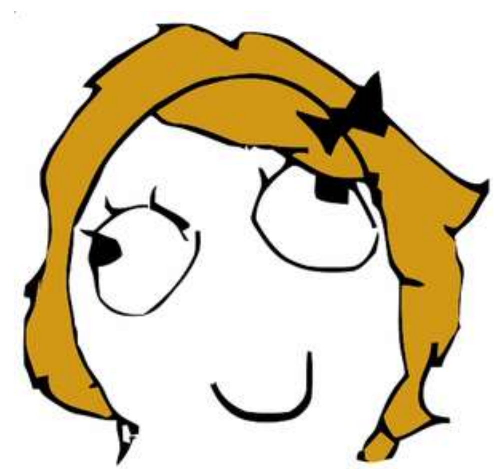
- http://targotennisberg.com/eio/DP/ristsumma.txt
  - Excel on ka samas kohas
- Kohanda see vastavaks:
  - Oma eelistatud programmeerimiskeskkonnale
  - Ülesande täpsetele tingimustele
- Käi tabeli koostamine debugeris läbi
  - Vaatle, kuidas tabel tekib

Moekunstnik ja koiliblikas

- http://targotennisberg.com/eio/eio.et.pdf
  - Ülesanne 5

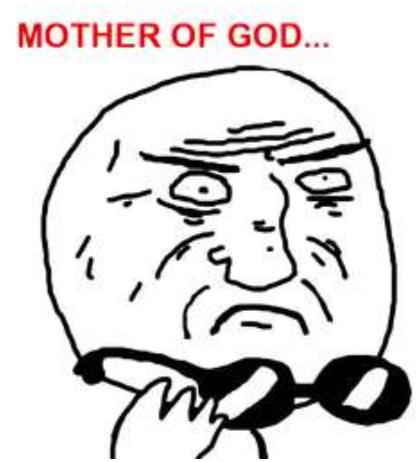
Koi - läbivaatus





Koi – keerukuse analüüs

- N Märdi käiku, seejärel N Kärdi käiku
  - Primitiivse lahenduse keerukus on $(N!)^2$
- Max N=20
  - $(20!)^2 = 5,919*10^{36}$
  - Arvestades 10^8 läbivaatutst sekundis, kulub $2*10^{21}$ aastat

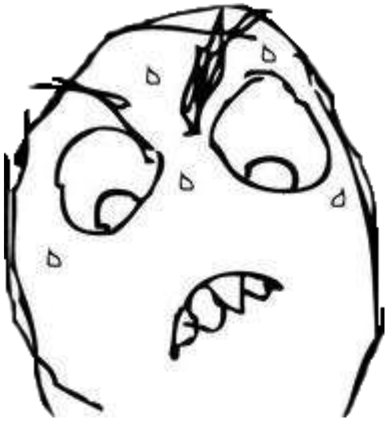


Koi - DP

- Paneme tähele, et puus hakkavad harud korduma
- Erinevaid võimalusi on sama palju kui sallide kombinatsioone ehk 2^N
- Ehitame 2^N elemendiga tabeli

Iseseisev töö

- http://targotennisberg.com/eio/Koi.cs
- Kohanda see vastavalt vajadusele enda programmeerimiskeskkonnale vastavaks
- Tee muudatus – mis oleks, kui Kärt sööks sallidesse iga kord 2 auku?
  - Teineteisest sõltumatud, võivad olla sama salli sisse
  - Leia vastus järgmisele juhule:
    - Väärtused 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100
    - Pikkused 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1



Kuidas DP ära tunda?

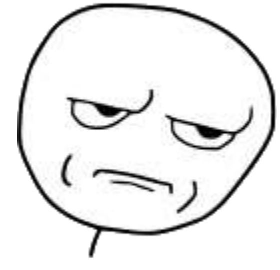
- Ülesanne taandatav **sama tüüpi** alamülesanneteks
- Täisläbivaatuse variantide hulk selgelt liiga suur

Leia DP lähenemine 1

“On antud kaks väikestest ladina tähtedest sõnet ***u*** *ja* ***v*** *pikkustega kuni* ***100****. Leida minimaalne tähtede arv, mida peab neist eemaldama, et tulemused oleksid võrdsed”*

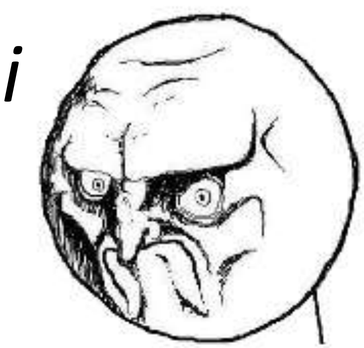
Leia DP lähenemine 2

Ühel pikal tänaval on ekspresstaksode liiklus organiseeritud järgmisel viisil. Iga kilomeetri järel on taksopeatus. Igast peatusest sõidab ekspresstakso peatumata edasi mööda tänavat 1, 2, 3, ..., 10 kilomeetrit. Iga pikkusega distantsi jaoks on fikseeritud erinev hind. Reisija tahab sõita ***n*** *kilomeetrit* ***(1 <= n <= 100)****. Milliseid distantse sõitvaid taksosid peaks reisija kasutama, et tema reis oleks võimalikult odav?*



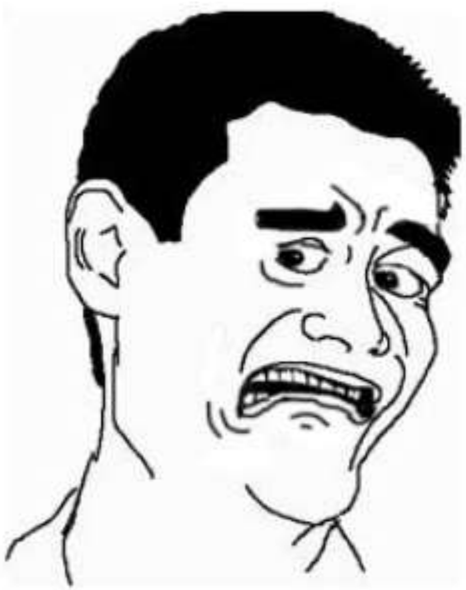
Leia DP lähenemine 3

Kaks venda, Alan ja Bob, tahavad jagada omavahel hulka kingitusi. Iga kingituse peab andma kas Alanile või Bobil; kingitusi poolitada ei saa. Igal kingitusel on väärtus. ***A*** *ja* ***B*** *tähistavad vastavalt Alanile ja Bobile antud kingituste kogusummat. Minimeerida vahe* ***A-B*** *absoluutväärtus. Kingituste arv* ***N*** *ei ületa 100. Kingituste väärtused on positiivsed täisarvud, mis ei ületa 200.*



Leia DP lähenemine 4, 5, 6, …

- http://kodu.ut.ee/~ahto/eio/2010.03.27/dp.ppt
- http://uva.onlinejudge.org/index.php?option=com_onlinejudge&Itemid=8&category=39
- https://www.topcoder.com/tc?d1=tutorials&d2=dynProg&module=Static



<- Enne

Pärast ->