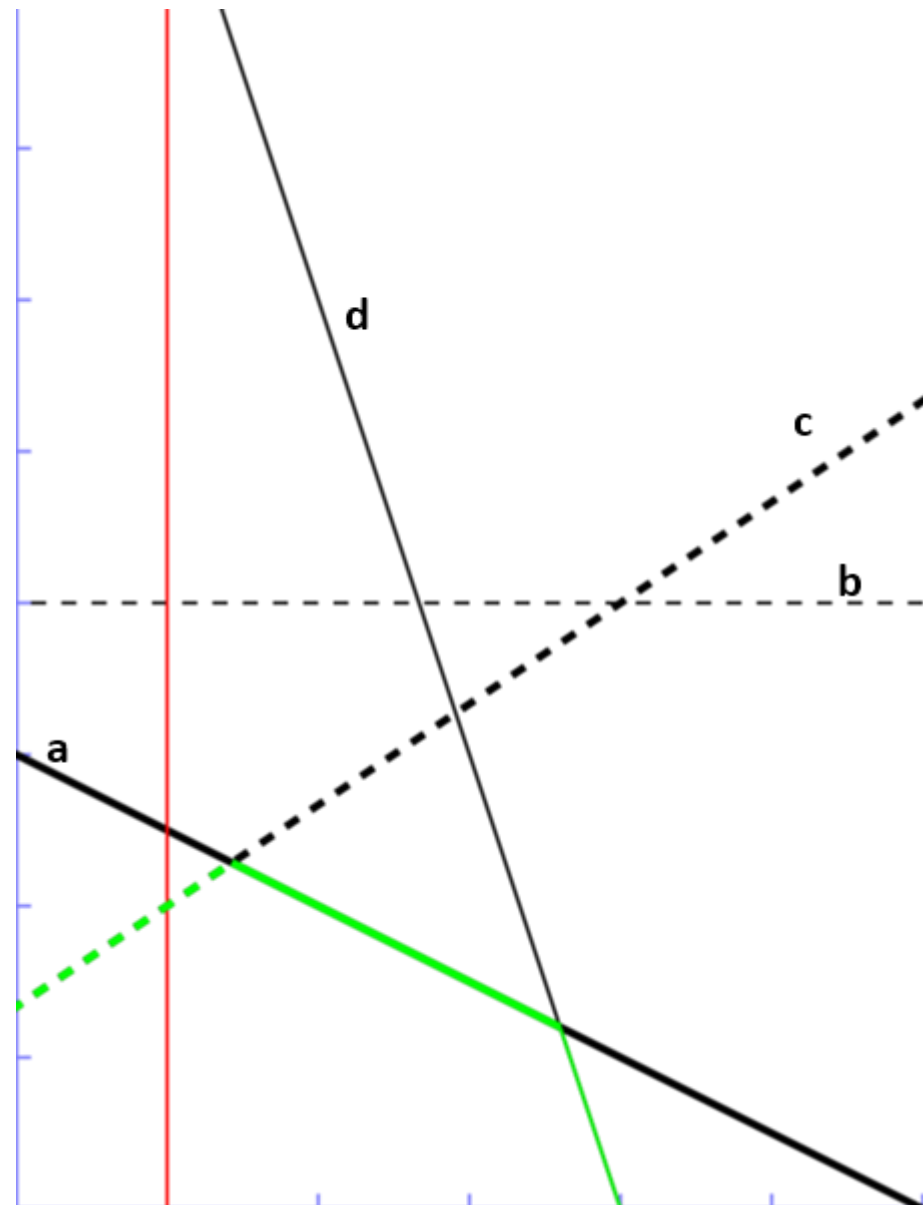


Kumera katte trikk

Targo Tennisberg, EIO 2025

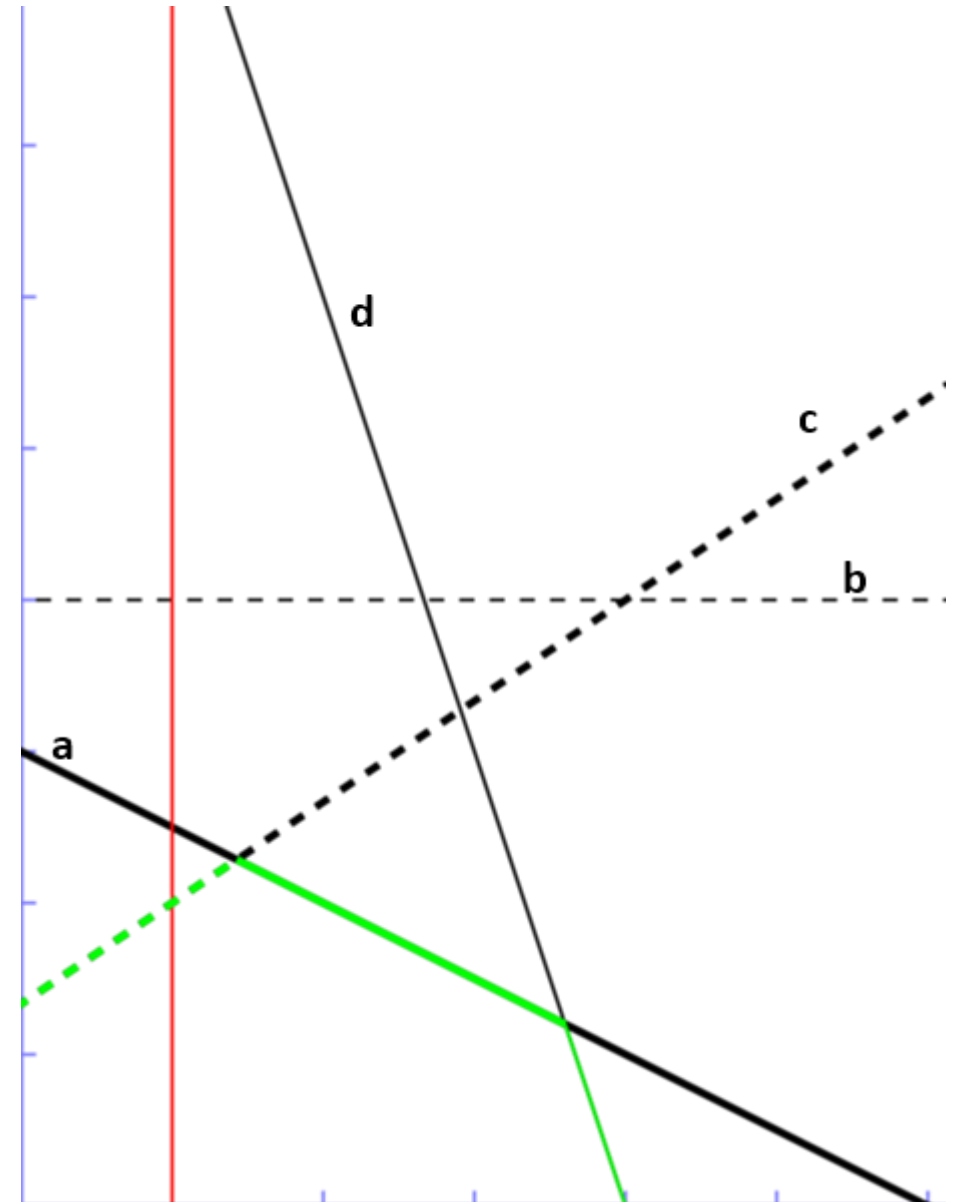
Leida lineaarfunktsioonide hulga lokaalne miinimum või maksimum

- Antud hulk sirgeid kujul $m_i x + b_i$
- Vaja Q korda leida nende min või max väärtus mingil kohal (punane joon)
- Naiivne lahendus $O(MQ)$
 - M =sirgete arv
 - Q =päringute arv
- Eesmärk on $O(M \log(M) + Q \log(M))$
- Tähelepanek 1:
 - Piisab roheline murdjoone käsitlemisest
- Tähelepanek 2:
 - roheline murdjoone lõikude tõusunurgad kahanevad



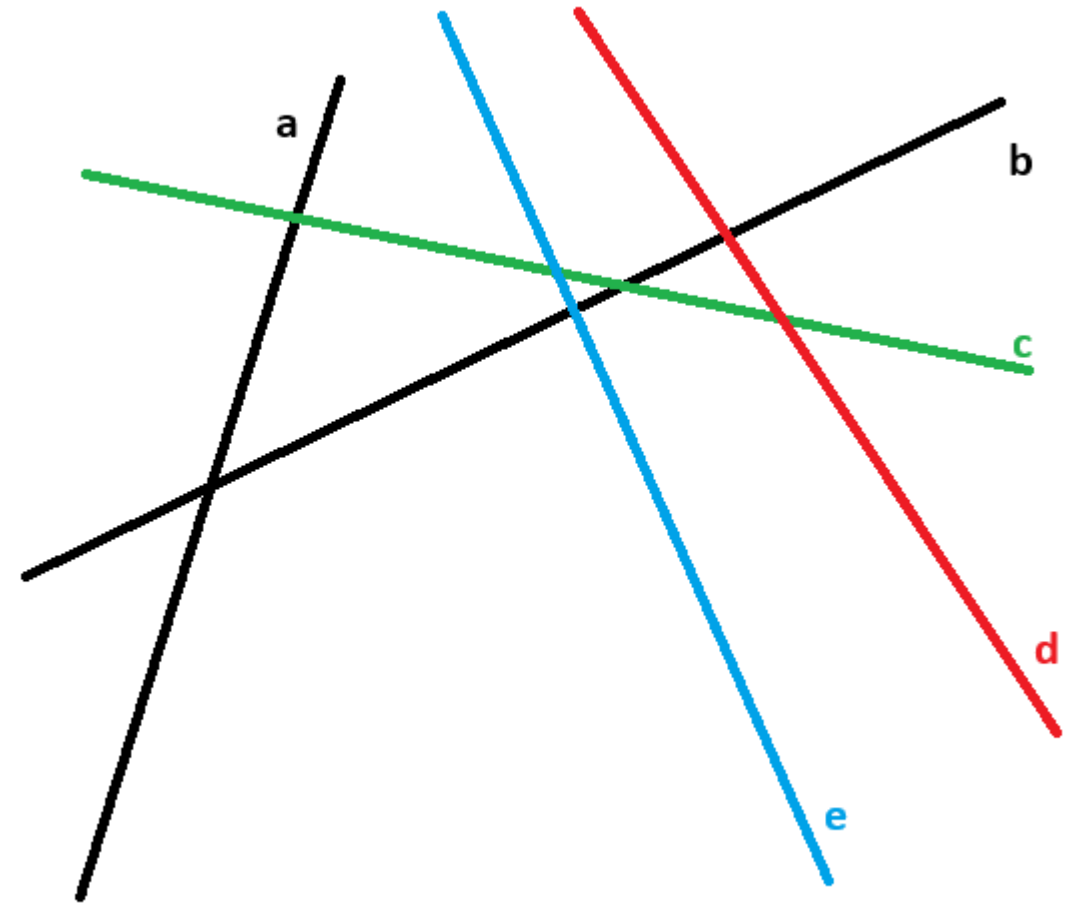
Lahendus

- Eemaldada sirged, mis ei osale rohelises joones (nt sirge b)
- Alles jäävad sirged sortida tõusunurga järgi
- Päringutele vastamine kahendotsinguga



Ebavajalike sirgete leidmine

- Sorteerime kõik sirged tõusunurga järgi
- Hakkame sirgeid ükshaaval lisama, hoides neid stackis
- Kui uus sirge lõikab varasemat sirget eelmisega võrreldes paremal, on kõik okei (a, b, c, d)
- Kui lõikab vasakul, siis vahepealne eemaldada
 - e eemaldab d ja c



Keerukus

- Joonte sortimine $M \log(M)$
- Joonte lisamine M
- Päringud $Q \log(M)$

Näide 1: CF 1083E - The Fair Nut and Rectangles

- Olgu $DP[i]$ parim lahendus, mis kasutab ristkülikut i
- Üldine lahendus DP-ga
 - $DP(i) = p_i \cdot q_i - a_i + \max_{1 \leq j < i} \{-p_j \cdot q_i + DP(j)\}$
 - Loogelistes sulgudes tekib lineaaravaldis – see on kumera katte triki võtmekoht!
- $DP[j]$ ja p_j on konstandid, q_i muutub
- Saame hulga sirgeid kujul $-p_j x + DP[j]$
- Leiame nende maksimumi punktis q_i

Näide 1 (cont)

- Igal hetkel on meil hulk sirgeid
- Kuna antud ülesandes „katsepunktid“ muutuvad monotoonselt, pole kahendotsingut vaja
 - Saame hoopis sirgeid välja visata!
- Igal tsükli sammul saame uue sirge
- Uus sirge on alati katte osa
 - Aga võibolla võimaldab millegi välja viskamist

Näide 2: IOI 2002 Batch Scheduling

- $DP[i]$ - parim lahendus töödele i kuni N
- $sumT[i]$ – tööde i kuni N kogu aeg
- $sumF[i]$ – tööde i kuni kogu kulufaktor
- $DP[i] = \min\{DP[j] + (S + sumT[i] - sumT[j]) * sumF[i]\}$

